УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ГАСИТЕЛЕМ КОЛЕБАНИЙ

А.В. Воропай, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Аннотация. *Исследуется нестационарное деформирование прямоугольной пластины средней толщины с установленным на ней гасителем колебаний. Предполагается, что возмущающая сила действует поперечно, а влияние гасителя учитывается в виде неизвестной сосредоточенной нагрузки. Задача рассматривается в рамках теории типа Тимошенко и сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I рода.*

Ключевые слова: *прямоугольная пластина, нестационарное нагружение, гаситель колебаний, интегральное уравнение Вольтерра.*

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ З ПОГАШУВАЧЕМ КОЛИВАНЬ

О.В. Воропай, доцент, к.т.н., ХНАДУ

Анотація. *Досліджено нестаціонарне деформування прямокутної пластини середньої товщини зі встановленим на ній погашувачем коливань. Припускається, що збурююча сила діє поперечно, а вплив погашувача враховується у вигляді невідомого зосередженого навантаження. Задача розглядається у рамках теорії типу Тимошенка та зводиться до розв'язку інтегрального рівняння Вольтерра I роду.*

Ключові слова: *прямокутна пластина, нестаціонарне навантаження, погашувач коливань, інтегральне рівняння Вольтерра.*

SIMMULATION OF NON-STATIONARY DEFFORMATION OF RECTANGULAR PLATE WITH VIBRATION ABSORBER

A. Voropay, Candidate of Technical Science, Associate Professor, KhNAHU

Abstract. *Non-stationary deformation of the medium thickness rectangular plate with vibration absorber installed on it is considered. It is assumed that the disturbing force acts transverse and the effect of the absorber is taken into account as unknown concentrated load. The problem is considered according to the Timoshenko's theory and is reduced to the first kind Volterra integral equation.*

Key words: *rectangular plate, non-stationary load, vibration absorber, Volterra integral equation.*

Введение

Одним из наиболее простых и распространенных методов гашения колебаний является использование амортизаторов. Как правило, моделирование наличия гасителей осуществляется на базе систем с конечным числом степеней свободы (зачастую одномассовых). При таком подходе элементы конструкций рассматриваются как недеформируемые тела.

Анализ публикаций

Работ, рассматривающих элементы конструкции, с гасителями колебаний, в рамках механики твердого деформируемого тела недостаточно. Упомянем некоторые работы, связанные с пластинчатыми элементами конструкций. В работе [1] рассмотрен активный гаситель колебаний для изгибающейся пластинки, который контактирует с ней по границе, однако сама пластина представлена, по сути, в виде колеблющейся массы. В работе [2] рассматриваются вынужденные колебания тонкой пластины с «дискретным динамическим гасителем» с использованием метода конечных элементов.

В настоящей работе предлагается новый подход при моделировании деформирования прямоугольной пластины с установленным на ней гасителем на базе теории интегральных уравнений Вольтерра, что позволяет получить аналитико-численное решение.

Цель и постановка задачи

Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины, шарнирно опертой по ее периметру, и гасителя колебаний, контактирующего с пластиной в некоторой точке (рис. 1). На пластину воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(x,y,t)$, вызывающая нестационарные колебания механической системы. Считается, что амортизатор установлен ортогонально срединной плоскости пластины, а перемещение его штока полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где он находится, т.е. $w_D(t) = w(x_D, y_D, t)$. Сила сопротивления амортизатора пропорциональна скорости его штока

$$R(t) = \kappa \cdot \frac{dw_D(x_D, y_D, t)}{dt},$$

где κ – коэффициент демпфирования.

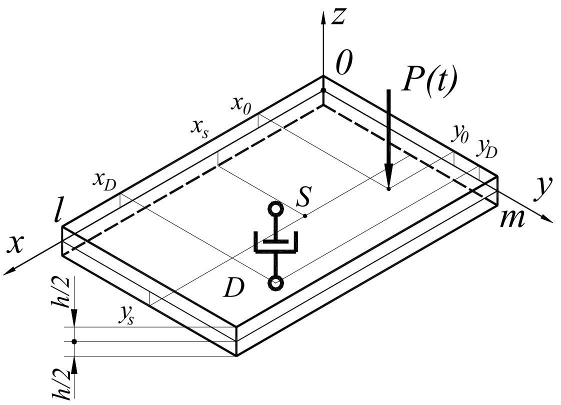

Рис. 1. Схема механической системы

При решении прямой задачи требуется определить компоненты перемещения во времени точек пластины (прогибы и углы поворота нормали) в предположении, что внешняя возмущающая сила задана и что координаты точки приложения этой силы, а также установки амортизатора известны (это могут быть любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе).

Решение задачи

Прямая задача сводится к решению системы четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Первые три уравнения – это уравнения деформирования пластины средней толщины, согласно уточненной теории типа Тимошенко [3]; а четвертое уравнение описывает взаимодействие между гасителем и пластиной

$$\begin{cases} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\ -P(x,y,t) + R(t)\delta(x - x_D)\delta(y - y_D); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \dfrac{D}{2}\left[(1-\nu)\nabla^2 \phi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}\right] - \\ -G'h(\phi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \dfrac{\partial^2 \phi_{xy}}{\partial t^2}; \\ w(x_D, y_D, t) = \displaystyle\int_0^t \frac{R(\tau)}{\kappa} d\tau, \end{cases} \qquad (1)$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $G' = k' \cdot G$; $I = h^3/12$;

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \qquad \phi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y};$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В этих соотношениях w_0 – прогиб пластины; ψ_x и ψ_y – углы поворота нормали; h – толщина пластины. Укажем, что $P(x,y,t)$ – возмущающая нагрузка (в качестве примера для конкретного расчета в настоящей работе – сосредоточенная); а $R(x,y,t)$ – реакция между гасителем и пластиной.

Система уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решается посредством разложения искомых функций w, ψ_x, ψ_y в двойные ряды Фурье, согласно рассмотренной схеме опирания. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. Решение подобных задач описано, например, в [4]. Задача может быть сведена к интегральному уравнению Вольтерра I рода, решение которого осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [5], так как задача является некорректной

$$\int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau = \int_0^t R(\tau)\left[K_R(t-\tau)+\frac{1}{\kappa}\right]d\tau,$$

где $K_i\left(x,y,t\right)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля вида

$$K_i\left(t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{ikn}\cdot\sum_{p=1}^{2}\Omega_{pkn}\cdot\sin\omega_{pkn}(t).$$

В результате решения находится сила взаимодействия между гасителем и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

Результаты расчетов

Далее представлены результаты вычислений. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho = 7890$ кг/м^3; $\nu = 0{,}3$; $E = 2{,}07\cdot10^{11}$ Па; $h = 0{,}04$ м; $l = 0{,}6$ м, $m = 0{,}4$ м. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0 = 0{,}2$ м, $y_0 = 0{,}2$ м. Координаты установленного на пластине гасителя: $x_D = 0{,}4$ м, $y_D = 0{,}2$ м.

На рис. 2 приведены кривые изменения прогиба в центре пластины без гасителя – кривая 1 и при разных коэффициентах демпфирования амортизатора (кривая 2 – $\kappa = 10^4$ кг/с; кривая 3 – $\kappa = 10^5$ кг/с; кривая 4 – $\kappa = 10^6$ кг/с; кривая 5 – $\kappa = 10^7$ кг/с).

На рис. 3 показаны изменения во времени внешней возмущающей силы – кривая 1, а также и реакции между пластиной и установленным на ней гасителем колебаний (кривые 2–5 соответственно).

Укажем, что для приведенного примера численного расчета при коэффициентах демпфирования $\kappa < 10^4$ кг/с величина реакции гасителя мала (изменения прогиба пластины практически полностью совпадают с прогибом без гасителя) и влиянием амортизатора можно пренебречь.

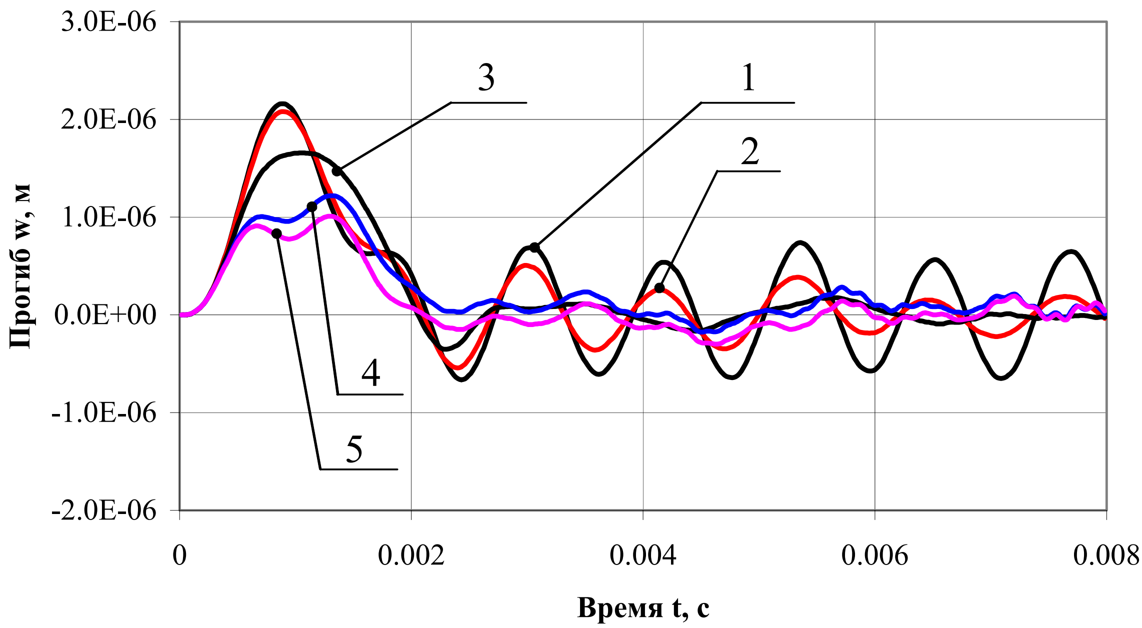

Рис. 2. Изменение прогиба центра пластины

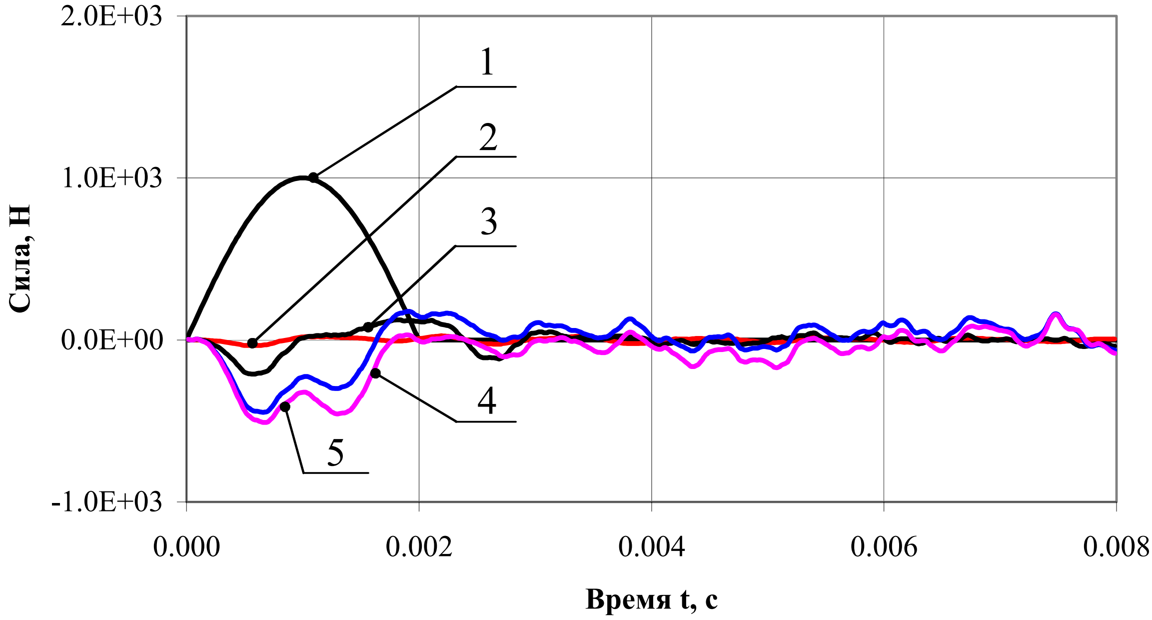

Рис. 3. Изменение возмущающей силы и реакции гасителя

Выводы

На основе предложенного в работе нового подхода при моделировании нестационарного деформирования прямоугольной пластины, с установленным на ней гасителем колебаний, имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики твердого деформируемого тела. Полученное аналитико-численное решение позволяет при необходимости моделировать наличие амортизаторов с переменным коэффициентом демпфирования.

Литература

1. Wu S. T. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor / S. T. Wu, J. Y. Chen, Y. C. Yeh, Y. Y. Chiu // Journal of Sound & Vibration. – 2007. – Vol. 300(1–2). – P. 250–264.
2. Ranjan V. Forced vibration response of thin plate with attached discrete dynamic absorbers / V. Ranjan, M. K. Ghosh // Journal of Thin-Walled Structures. – 2005. – Vol. 43. – P. 1513–1533.
3. Григолюк Э.И. Механика твердых деформируемых тел : Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М. : ВИНИТИ, 1973 – 272 с.
4. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций : монография / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с.
5. Численные методы решения некорректных задач : монография / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов, А.Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

Рецензент: В.П. Кожушко, профессор, д. т. н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 31 мая 2011 г.