УДК 656.11

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСУ ЗАТРИМКИ ВИЇЗДУ АВТОБУСА ІЗ ЗУПИННОГО ПУНКТУ В ПОТІК АВТОМОБІЛІВ

П.Ф. Горбачов, проф., д.т.н., О.В. Макаричев, доц., к.ф.-м.н., С.В. Пронін, к.т.н., О.С. Колій, асист.,
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. *Формалізовано та теоретично обґрунтовано методику розрахунку часу затримки виїзду автобуса із зупинного пункту після закінчення посадки пасажирів та закриття дверей, з урахуванням інтенсивності транспортного потоку та характеристик автобуса.*

Ключові слова: *автобус, зупинний пункт, інтенсивність руху, транспортний потік, час затримки, швидкість руху.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ ВЫЕЗДА АВТОБУСА ИЗ ОСТАНОВОЧНОГО ПУНКТА В ПОТОК АВТОМОБИЛЕЙ

П.Ф. Горбачев, проф., д.т.н., А.В. Макаричев, доц., к.ф.-м.н., С.В. Пронин, к.т.н., А.С. Колий, ассист., Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

Аннотация. *Формализована и теоретически обоснована методика расчета времени задержки выезда автобуса с остановочного пункта после окончания посадки пассажиров и закрытия дверей, с учетом интенсивности транспортного потока и характеристик автобуса.*

Ключевые слова: *автобус, остановочный пункт, интенсивность движения, транспортный поток, время задержки, скорость движения.*

DETERMINATION OF THE DELAY DEPARTURE TIME OF THE BUS FROM STOPPING POINT INTO THE CAR FLOW

P. Gorbachov, Prof., Ph. D. (Eng.), O. Makarychev, Assoc. Prof., Ph. D. (Eng.), S. Pronin, Ph. D. (Eng.), O. Koliy, T. Asst.,
Kharkiv National Automobile and Highway University

Abstract. *An analytical model for estimation of the bus departure delax from the bus stopping point after passenger loading is presented. The model allows to take into account the traffic density on a particular road section of the transport network, as well as the bus parameters.*

Key words: *bus, stop point, traffic, traffic flow, delay time, speed.*

Вступ

Одним з найбільш гострих питань, що виникають в умовах значної інтенсивності транспортних потоків, є вплив цих потоків на рух маршрутних транспортних засобів. Найбільшою мірою цей вплив виявляється при початку руху маршрутного транспортного засобу від позначеної зупинки, розташованої в заїзному «кармані», коли цей маневр призводить до появи небезпеки для руху. Особливо явно це спостерігається в історичному центрі міст, де інтенсивний та часто швидкісний транспортний потік спонукає водіїв маршрутних транспортних засобів очікувати появи в потоці інтервалу, достатнього для безпечного маневрування. Це призводить до суттєвих затримок при виїзді не лише транспортного засобу, а ще й пасажирів, що прямують маршрутом.

Аналіз публікацій

Взаємодія між автомобілями є одним з найбільш важливих аспектів, пов'язаних з рухом транспортних потоків. Це може бути взаємодія між автомобілями одного потоку або взаємодія між окремими транспортними потоками. Така взаємодія має місце, коли автомобіль переходить у сусідній ряд, входить у транспортний потік або перетинає його. При взаємодії автомобілів виконання цих основних маневрів пов'язане з поняттям прийнятності інтервалу між автомобілями. Не випадково процес виїзду автомобіля з в'їзду, що прилягає до магістралі, вивчався багатьма дослідниками. Більшість робіт мала емпіричний характер, і на їх основі вироблялися методи проектування та експлуатації дорожніх споруджень. Також були спроби одержати математичний опис процесу виїзду на магістраль, щоправда, вони мали дещо обмежений успіх через складну картину взаємодій між автомобілями. Розв'язання даної задачі також ускладнюється відсутністю точних критеріїв вибору прийнятної відстані між автомобілями та логіки виїзду на магістраль.

Моделювання виїзду автобуса в потік автомобілів належить до класу мікроскопічних моделей. У мікроскопічних моделях, на відміну від макроскопічних, моделювання транспортного потоку проводять із точністю до кожного автомобіля в потоці. Такий підхід дозволяє більш точно описати рух транспортного потоку.

Найбільш поширеною з мікромоделей стала модель «розумного водія» (IDM) [1]. Численні експерименти з цією моделлю показали, що її властивості стійкі до зміни параметрів, вона демонструє реалістичну поведінку при розгоні й гальмуванні та відтворює основні досліджуванні властивості транспортного потоку.

З розвитком комп'ютерної техніки широке застосування отримало моделювання на основі моделей клітинних автоматів (CA). У них дорога розбивається на клітки, дискретним також вважається час. Часто, але далеко не завжди [2], вважається, що у клітці може перебувати не більше одного автомобіля. Також часто можливі значення швидкості автомобілів вважають дискретними. Модель CA припускає, що на кожному кроці $m \to m+1$ стан усіх автомобілів у системі оновлюється відповідно до таких правил:

– прискорення (показує тенденцію рухатися якнайшвидше, не перевищуючи максимально припустимої швидкості);
– гальмування (гарантує відсутність зіткнень з автомобілем, який рухається попереду);
– випадкові збурювання (ураховують відмінності в поведінці автомобілів);
– рух автомобіля.

Наведені правила є базовими, для моделювання більш складних аспектів динаміки потоку необхідно формулювати додаткові правила. Численні експерименти показують, що потік є стійким за малої щільності і втрачає стійкість – за високої. При цьому ключову роль у розвитку нерівноваги відіграє стохастичність процесу, тобто для розвитку заторів потрібно, щоб імовірність затору p не дорівнювала нулю.

При $p = 0$ потік залишається стійким за всіх значень щільності [3]. Дана обставина може розглядатися як серйозний теоретичний недолік моделей CA порівняно з моделями «розумного водія», в яких флуктуації відіграють роль початкового поштовху, а подальший розвиток затору пояснюється нестійкістю (цілком детермінованою) рівноважного розв'язання.

Мета і постановка завдання

Метою роботи є визначення часу затримки виїзду автобуса із зупинного пункту в потік автомобілів, що рухаються. Для цього необхідно розробити математичний опис процесу виїзду автобуса, який перебуває на зупинці, з урахуванням стохастичного характеру руху автомобілів по магістралі.

Модель затримки виїзду автобуса в потік автомобілів

Дослідженнями встановлено, що для опису потоків порівняно малої інтенсивності, які характеризуються ймовірністю проїзду певного числа транспортних засобів через розріз дороги, можна застосовувати розподіл Пуассона [4]. При цьому якщо поява автомобілів характеризується розподілом Пуассона, то інтервали τ_i між автомобілями розподілені за експонентним законом

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{1}$$

де $F(t)$ – імовірність того, що $\tau_i \le t$, $0 \le F(t) \le 1$, коли $t>0$ або $t \in (0;\infty)$, λ – основний параметр розподілу, інтенсивність транспортного потоку, авт./с.

У загальному випадку доцільно припустити, що потік автомобілів, проїжджає повз зупинку, є рекурентним, якщо випадкові величини τ_1, τ_2, τ_3, … τ_n, які утворюють послідовність незалежних однаково розподілених за законом $F(t)$ випадкових величин, показують інтервал часу між сусідніми автомобілями в потоці. Існують три основні події, пов'язані з процесом відправлення автобуса від зупинки:
1. Подія A_0 – припускає, що до моменту t не було жодного автомобіля в русі та на проміжку $(t;\ t + \tau(v))$ не було жодного автомобіля, що проїхав би біля зупинки.
2. Подія A_n – до моменту t проїхало рівно n автомобілів і на проміжку часу $(t;\ t+\tau(v))$ проїжджаючих автомобілів біля зупинки немає.
3. Подія B – подія, коли на проміжку часу $(t;\ t+ \tau(v))$ не було автомобілів, які проїжджали би біля зупинки, тобто автобус безперешкодно виїде із зупинного пункту, та при цьому число n автомобілів, що проїхали біля зупинки за час стоянки на ній автобуса, може набути будь-якого натурального значення n = 0, 1, 2,… і т.д. Тоді

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \,. \qquad (2)$$

Імовірність настання події B залежить від двох параметрів $(t,\ \tau(v))$

$$P(t,\tau) = P(B) = P(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,, \qquad (3)$$

де $P(A_0) = \bar{F}(t+\tau(v))$, $P(A_n) = \bar{F}(t+\tau(v)-x)$.

Імовірність випадкової події A_n зручно знайти, визначивши умовну ймовірність настання цієї події за умови, що $t_n = x$

$$P\{A_n | t_n = x\} = P\{\tau_{n+1} > \tau(v) + t - x\}. \qquad (4)$$

Абсолютна імовірність появи події A_n

$$P(A_n) = \int_0^t P\{A_n | t_n = x\} \cdot f_n(x)dx, \qquad (5)$$

де $f_n(x)$ – щільність розподілу випадкової величини проїзду останнього автомобіля повз зупинку перед початком виїзду автобуса, $t_n = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots\ldots + \tau_n$.

При цьому функція розподілу випадкової величини $t_n = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n$ може бути знайдена рекурентно, спираючись на функцію розподілу випадкової величини t_{n-1}

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1} \cdot (x-y) \cdot f(y)dy\,, \qquad (6)$$

де $f(y)dy$ – щільність розподілу випадкової величини τ_n.

Для знаходження щільності розподілу випадкової величини t_n визначається похідна виразу (6).

$$F_n'(t) = f_n(x) = \int_0^x f_{n-1} \cdot (x-y) \cdot f(y)dy\,. \qquad (7)$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \\ &= P(A_0) + \int_0^t \left[1 - F(\tau(v) + t - x)\right] \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx. \end{aligned} \qquad (8)$$

Для визначення та інтерпретації $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ необхідно знайти $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$. Нехай $v(x)$ – число автомобілів, що проїхали повз зупинний пункт за час x. Тоді

$$F_n(x) = P\{t_n \le x\} = P\{\nu(x) \ge n\}; \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu(x) \ge n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot P\{\nu(x) = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = Mv(x), \end{aligned} \qquad (10)$$

де $Mv(x)$ – математичне очікування числа автомобілів, що проїхали повз зупинний пункт на проміжку часу [0, x], яке позначається через $H(x)$. При цьому $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, а $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \mathrm{M}\nu(x) = H(x)$.

Звідси

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) = H'(x) = h(x), \qquad (11)$$

де $h(x)$ – похідна по x від середнього числа автомобілів, що проїхали за час x.

Ймовірність настання події B має вигляд

$$P_t\{\tau\} = P(B) = \bar{F}(t+\tau(v)) + \\ +\int_0^t \bar{F}(t+\tau(v)-x)\cdot h(x)dx, \tag{12}$$

де $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P\{\tau_i > t\} = 1 - P\{\tau_i \le t\}$.

Підстановка (1) в $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, де m_1 – середнє значення інтервалу руху автомобілів, з $m_1 = M_{\tau i}$ дає

$$\bar{F}(t) = 1-(1-e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}. \tag{13}$$

Вираз (13), підставлений в (12), дає

$$P_t\{\tau\} = e^{-\lambda(t+\tau(v))} + \int_0^t e^{-\lambda(t+\tau(v)-x)}\cdot\lambda dx = e^{-\lambda\tau(v)}. \tag{14}$$

Для визначення імовірності події B (тобто того, що автобус безперешкодно виїде із зупинки) $\lambda = 1/m_1$ підставляється в (14)

$$P(B) = e^{-\tau(v)/m_1}. \tag{15}$$

Для визначення часу очікування виїзду автобуса із карману в рекурентний потік однорідних подій після посадки всіх пасажирів позначається подія $A1\{\zeta_t > \tau_{(v)}\}$ – виїзд автобуса без затримки; при цьому $\tau(v)$ = const, t – момент включення водієм поворотного сигналу для виїзду із зупинного пункту, ζ_t – час очікування появи чергового автомобіля, $\tau(v)$ – час виїзду автобуса.

$A\{\tau_i > \tau(v)\}$ – виїзд автобуса здійснюється після проїзду чергового автомобіля повз зупиночний пункт, де τ_i – інтервал руху автомобілів, $t_{i-2,}$ t_{i-1} t_{i+1} – моменти проїзду автомобілів повз зупинку. Тоді час виїзду автобуса з урахуванням можливої затримки

$$\tau_{в.з} = \tau_{(v)}\cdot\chi_{A1} + \chi_{\bar{A}1}\cdot(\xi_t + \tau_в), \tag{16}$$

де $\tau_в$ – час виїзду з урахуванням затримки від моменту проїзду чергового автомобіля, с; $\chi A1$ – індекс випадкової події $A1$ (подія $\bar{A}$ зворотна події A).

Нехай потік автомобілів, що проїжджають повз зупинку, є найпростішим (Пуассонівським) з параметрами λ, тоді, в силу відсутності післядії, для показового інтервалу найпростішого потоку $\tau_{в.з}$ має такий самий розподіл, як і $\tau_в$, оскільки як ζ_t і τ_i мають один і той самий показовий розподіл. Відповідно $\tau_{в.з} = \tau_в$

$$\tau_в = \tau(v)\cdot\chi_{A1} + \chi_{\bar{A}1}\cdot(\tau_1 + \tau'_в), \tag{17}$$

тоді

$$\tau(v)\cdot\chi_{A1} + \chi_{\bar{A}1}\cdot(\xi_t + \tau_в) = \\ = \tau(v)\cdot\chi_{A1} + \chi_{\bar{A}1}\cdot(\tau_1 + \tau'_в) \tag{18}$$

та

$$\tau_в = \begin{cases}\tau(v), P(A) \\ \tau_1 + \tau'_в, P(A)\end{cases}, \tag{19}$$

де $\tau'_в = \tau_1 + \tau_2 + \ldots\ldots\ldots + \tau_n$.

Ймовірність того, що за випадковий час $\tau_{(v)}$ не відбудеться деяка випадкова подія простого потоку з інтенсивністю настання S, є

$$\varphi_{\tau(v)}(S) = Me^{-S\tau(v)}. \tag{20}$$

Оскільки $\tau_{(v)}$ = const, то $Me^{-S\tau(v)} = e^{-S\tau(v)}$ = const. При цьому $a(s) = Me^{-S\tau в}$ – шукана величина.

Перетворення Лапласа для часу виїзду, з урахуванням затримки автобуса, дає

$$a(s) = e^{-S\tau(v)}\cdot P(A) + b(s)\cdot a(s), \tag{21}$$

де $e^{-S\tau(v)}\cdot P(A)$ – імовірність того, що не відбудеться додаткова подія, якщо виїзд автобуса здійсниться без затримки на першому інтервалі; $b(s)\cdot a(s)$ – імовірність того, що не відбудеться додаткова подія, якщо виїзд автобуса здійсниться не на першому інтервалі; $b(s)$ – імовірність того, що не відбудеться додаткова подія на інтервалі, довжина якого менше $\tau_{(v)}$, тобто $\tau_i < \tau(v)$.

Тоді перетворення Лапласа для часу виїзду, якщо на першому проміжку τ_1 виїзд не відбувся

$$b(s) = Me^{-S(\tau i\,|\,\tau i < \tau(v))}\cdot P\{\tau_i < \tau(v)\} = \\ = M(e^{-S\tau i}\cdot\chi_{\{\tau i < \tau(v)\}}). \tag{22}$$

Функція розподілу інтервалу, на якому немає виїзду автобуса

$$F_{\tau(v)}(x) = \int_0^x f_{\tau(v)}(t)\,dt = \begin{cases} 0, \ x < 0; \\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda\tau(v)}}, \ 0 \le x \le \tau(v); \\ 1, \ x > \tau(v). \end{cases} \quad (23)$$

Для визначення щільності розподілу інтервалу руху автомобілів отримане вираження інтегрується в інтервалі $0 < x < \tau(v)$

$$f_{\tau(v)}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda\tau(v)}}, 0 \le x \le \tau(v) \\ 0, \ x \notin [0; \tau(v)] \end{cases}. \quad (24)$$

Тоді математичне очікування випадкової величини τ_i з параметром $\tau_i < \tau_в$

$$\begin{gathered} \mathrm{M}e^{-S(\tau_i|\tau_i<\tau(v))} = \int_0^{\tau(v)} e^{-Sx} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda\tau(v)}} dx = \\ = \frac{\lambda}{\lambda+S}\left(\frac{1-e^{x(\lambda+S)}}{1-e^{-\lambda\tau(v)}}\right). \end{gathered} \quad (25)$$

Підстановка виразу (25) в $b(s)$, (20) дає

$$b(s) = \mathrm{M}e^{S\tau}\chi_{\{\tau_i<\tau(v)\}} = \frac{\lambda}{\lambda+S}(1-e^{x(\lambda+S)}). \quad (26)$$

Підстановка отриманого виразу в (19) дає

$$\begin{gathered} a(s) = e^{-S\tau(v)} \cdot e^{-\lambda\tau(v)} + \\ +a(s) \cdot \frac{\lambda}{\lambda+S} \cdot (1-e^{-\tau(v)(\lambda+S)}) = \\ = \frac{(\lambda+S)e^{-(\lambda+S)\tau(v)}}{S+\lambda e^{-\tau(v)(\lambda+S)}}. \end{gathered} \quad (27)$$

Оскільки

$$(\mathrm{M}e^{-sx})'_S = \mathrm{M}\left[e^{-sx} \cdot (-x)\right]\Big|_{S=0} = -\mathrm{M}(x). \quad (28)$$

Аналогічно визначається математичне очікування часу виїзду автобуса після диференціювання виразу (25) у точці нуль

$$a'(s)\big|_{S=0} = \frac{1}{\lambda}(1-e^{\tau(v)\lambda}); \quad (29)$$

$$\mathrm{M}\tau_в = -a'(0) = \frac{1}{\lambda}(e^{\tau(v)\lambda}-1). \quad (30)$$

Звідси середній час виїзду автобуса дорівнює

$$T_в^{ср}(v) = \frac{1}{\lambda}(e^{\tau(v)\lambda}-1). \quad (31)$$

Оскільки

$$T_в^{ср}(v) = \tau(v) + T_з^{ср}, \quad (32)$$

то середній час затримки виїзду автобуса із зупинного пункту можна розрахувати

$$T_з^{ср} = T_в^{ср}(v) - \tau(v) = \frac{1}{\lambda}(e^{\tau(v)\lambda}-1) - \tau(v). \quad (33)$$

Час виїзду автобуса із зупинки в потік, який рухається зі швидкістю V_n, розраховується так

$$\tau(v) = \frac{v_n}{a}, \quad (34)$$

де a – прискорення автобуса, м/с.

Приклад розрахунку затримки виїзду автобуса в потік автомобілів

Для проведення розрахунку часу затримки виїзду автобуса спочатку необхідно визначити потрібні вихідні дані. Визначення середньої інтенсивності в центральній частині міста Харкова проводилось за допомогою натурних спостережень. Для цього спостерігачі проводили фіксацію на відеокамеру руху транспорту на ділянках вулиць Сумської і Пушкінської. Всього було проведено 40 спостережень на різних ділянках вказаних вулиць. Обстеження проводилось одну годину на кожній з ділянок, які обиралися випадково. При цьому середнє значення інтенсивності руху автомобілів склало 990 авт./год. Як технічний засіб для фіксації параметрів руху маршрутних транспортних засобів у центральній частині м. Харкова був обраний GPS-навігатор. Цей прилад дозволяє одночасно фіксувати поточний час, швидкість і місце розташування транспортного засобу. Для центральної частини міста Харкова є характерною дуже низька швидкість руху маршрутних транспортних засобів, середнє значення якої протягом робочого дня склало 11,2 км/год на вул. Сумській і 14,7 км/год на вул. Пушкінській. Теоретична залежність для безперервного розгону автобуса була отримана за допомогою регресійного аналізу. Статистичні характеристики отриманої моделі мають достатньо високі показники, що дає вагомі підстави для її використання на практиці та при моделюванні транспортного потоку (табл. 1).

Таблиця 1 Результати регресійного аналізу

Параметри моделі	Значення
Множинний коефіцієнт кореляції, R	0,9157
Коефіцієнт детермінації, R-квадрат	0,839
Нормований R-квадрат	0,832
Стандартна похибка	0,865
Кількість спостережень	27
Коефіцієнти за змінної X_1 (прискорення автобуса, м/с^2)	0,342

За результатами розрахунку за формулою (33) було визначено, що час затримки виїзду автобуса із зупинного пункту на вулиці Сумській в середньому буде дорівнювати 32 с, а на Пушкінській – 42 с. Приклад залежності середнього часу затримки виїзду автобуса з карману зупинного пункту від швидкості транспортного потоку наведений на рис. 1.

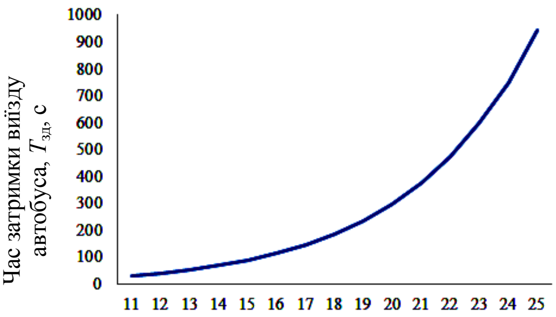

Рис. 1. Залежність часу затримки виїзду автобуса із зупинки від швидкості потоку

З рисунка можна побачити, що швидкість зростання функції часу затримки виїзду автобуса із зупинного пункту пропорційна досягнутому значенню в поточній точці.

Висновок

Отримані в результаті натурних спостережень дані про прискорення та швидкість руху маршрутних транспортних засобів мають достатньо високі статистичні характеристики, що створює підґрунтя для поширеного використання регресійних залежностей для оцінки характеристик руху маршрутних транспортних засобів у загальному транспортному потоці. Розроблена методика оцінки часу затримки виїзду автобуса з карману зупинного пункту дозволяє оцінювати доцільність розташування зупинних пунктів на перегонах транспортної мережі та може бути використана для скорочення обсягів натурних спостережень за транспортним потоком при вирішенні питань взаємодії між маршрутними та іншими транспортними засобами в потоці.

Література

1. Treiber M. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations / M. Treiber, A. Hennecke, D. Helbing // Phys. Rev. E. – 2000. – № 62. – P. 1805–1824.
2. Куржанский А.А. Роль макромоделирования в активном управлении транспортной сетью / А.А. Куржанский, А.Б. Куржанский, П. Варайя // Труды МФТИ. – 2010. – Т. 2, № 4(8). – С. 100–118.
3. Nagel K. Deterministic models for traffic jams / K. Nagel, H. J. Herrmann // Physica A. – 1993. – № 199. – P. 254–269.
4. Хейг Ф. Математическая теория транспортных потоков / Ф. Хейг. – М.: Мир, 1966. – 284 с.

References

1. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Phys. Rev. E.*, 2000, vol. 62. pp. 1805–1824.
2. Kurzhanskiy A.A., Kurzhanskiy A.B., Varayya P. Rol makromodeliro-vaniya v aktivnom upravlenii transport-noy setyu. *Trudyi MFTI*, 2010, iss. 2, vol. 4(8). pp. 100–118.
3. Nagel K., Herrmann H.J. Deterministic models for traffic jams. *Physica A.*, 1993, vol. 199. pp. 254–269.
4. Heyg F. Matematicheskaya teoriya transportnyih potokov. Moskow, Mir Publ., 1966. 284 p.

Рецензент: Є.В. Нагорний, професор, д.т.н., ХНАДУ.

Стаття надійшла до редакції 26 листопада 2014 р.