АВТОМОБИЛЕСТРОЕНИЕ И КОНСТРУКТИВНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ АВТОТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

УДК 629.113

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТОРМОЗАМИ КОЛЕСНЫХ МАШИН

А.Н. Туренко, профессор, д.т.н., В.М. Колодяжный, профессор, д. физ.-мат. н., С.Н. Шуклинов, доцент, к.т.н., В.И. Вербицкий, доцент, к. физ.-мат. н., ХНАДУ

Аннотация. *Выполнен анализ устойчивости возмущенного движения системы автоматического управления тормозами на основе второго метода Ляпунова. Используя преобразования Лурье, получена каноническая форма системы уравнений автоматического управления. Это позволило определить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы независимо от начального её состояния и конкретного выбора допустимой характеристики регулятора.*

Ключевые слова: *система, тормозное управление, колесная машина, функция Ляпунова, устойчивость.*

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЗБУРЕНОГО РУХУ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ГАЛЬМАМИ КОЛІСНИХ МАШИН

А.М. Туренко, професор, д.т.н., В.М. Колодяжний, професор, д. фіз.-мат. н., С.М. Шуклінов, доцент, к.т.н., В.І. Вербицький, доцент, к. фіз.-мат. н., ХНАДУ

Анотація. *Виконано аналіз стійкості збуреного руху системи автоматичного керування гальмами на підставі другого методу Ляпунова. Використовуючи перетворення Лур'є, отримано канонічну форму системи рівнянь автоматичного керування. Це дозволило визначити необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості системи незалежно від її початкового стану та конкретного вибору допустимої характеристики регулятора.*

Ключові слова: *система, гальмове керування, колісна машина, функція Ляпунова, стійкість.*

ANALYSIS OF PERTURBED MOTION STABILITY OF WHEELER VEHICLES BRAKES CONTROL SYSTEM

A. Turenko, Professor, Doctor of Technical Science, V. Kolodyazhnyi, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Science, S. Shuklinov, Associate Professor, Candidate of Technical Science, V. Verbytskiyi, Associate Professor, Candidate of Physico-Mathematical Science, KhNAHU

Abstract. *The analysis of the perturbed motion stability of the brake automatic control system on the basis of Lyapunov's second method is carried out. Using transformations of Lurie there has been obtained the canonical form of the system of equations of automatic control. It allowed determining the necessary and sufficient conditions of the asymptotic stability of the system irrespective of its initial condition and a definite choice of the admissible characteristic of the regulator.*

Key words: *system, brake system, wheel vehicle, Lyapunov's function, stability.*

Введение

Процесс управления тормозами колесных машин может происходить при условиях:
– тормозная сила на колесе имеет значение, близкое к значению силы сцепления колеса с опорной поверхностью или превышающее его;
– тормозная сила на колесе меньше возможной силы сцепления колеса с опорной поверхностью.

Эффективность торможения в первом случае определяется коэффициентом сцепления колеса с опорной поверхностью и качеством рабочего процесса антиблокировочной системы, обеспечивающей адаптацию управляющего воздействия к условиям качения колеса. Данный случай управления можно охарактеризовать как экстремальный режим управления тормозами. Эффективность торможения во втором случае определяется управляющим воздействием водителя, эффективностью тормозной системы и качеством рабочего процесса регулятора тормозных сил. В этом случае режим управления тормозами характеризуется как доэкстремальный.

Анализ публикаций

Вопросы адаптивного управления в режиме экстремального управления колесными машинами освещены достаточно глубоко [1, 2].

Режим доэкстремального управления тормозами колесных машин исследовался в основном в плане распределения тормозных усилий [3]. Вопросы адаптации тормозного привода, направленные на стабилизацию эргономических параметров управления тормозами, исследованы недостаточно [3].

Цель и постановка задачи

Следует заметить, что режим доэкстремального управления тормозами характеризуется нестабильностью эргономических параметров, обусловленной действием возмущающих факторов, изменяющихся при эксплуатации:

– массы колесной машины;
– коэффициентов эффективности тормозных механизмов;
– эффективности тормозного привода.

Вследствие этого водителю необходимо адаптироваться к меняющимся характеристикам тормозного управления. Причем влияние некоторых возмущающих факторов он может заранее оценить с определенной достоверностью (например, изменение массы машины после загрузки). Влияние других параметров или их сочетания водитель оценивает по замедлению машины только во время процесса торможения. В этом случае у водителя остается очень мало времени на адаптацию к изменившимся характеристикам тормозного управления.

С целью повышения качества и эффективности доэкстремального режима торможения требуется разработать автоматическую систему управления, которая позволит переложить функции адаптации с человека (водителя) на тормозное управление колесной машины. Заметим, что в этом случае тормозное управление выполняет функции регулятора в нестационарной системе управления объектом–колесной машиной, а водитель выполняет функции звена, определяющего параметры состояния колесной машины.

Обычно система автоматического управления содержит основной контур и контур самонастройки и состоит из объекта регулирования, измерителей, суммирующего прибора, сервомотора и механизма обратной связи. В нашем случае основной контур управления состоит из регулятора – тормозного привода и исполнительных устройств – тормозных механизмов. Под объектом регулирования понимается колесная машина, а совокупность измерителей, суммирующего прибора и модулятора управляющего воздействия образует контур самонастройки. Задача контура самонастройки обеспечить инвариантность основного контура управления к внешним воздействиям.

Целью работы является определение необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости системы автоматического управления тормозами в режиме доэкстремального управления независимо от начального её состояния и конкретного выбора допустимой характеристики регулятора. Для достижения поставленной цели необходимо составить систему уравнений системы автоматического регулирования и выполнить анализ ее устойчивости на основе второго метода Ляпунова.

Уравнения возмущенного движения системы управления

Уравнение движения колесной машины при торможении имеет вид [4]

$$P_{\text{в}} + P_{\psi} + P_{\text{т}} = P_j , \qquad (1)$$

где $P_{\text{в}}$ – сила сопротивления движению колесной машины со стороны воздуха, $P_{\text{в}} = \text{к}_{\text{в}} F_{\text{а}} \left[V_{\text{а}}(t) \right]^2$; P_{ψ} – сила дорожного сопротивления движению колесной машины, $P_{\psi} = m_{\text{а}} g \psi$; $P_{\text{т}}$ – тормозная сила на тормозных колесах, $P_{\text{т}} = \left[P_{\text{п}}(t) - P_0 \right] K_{\text{ту}}$; P_j – сила инерции колесной машины, $P_j = m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}} j_{\text{т}}(t)$.

Преобразуем уравнение (1), при этом замедление $j_{\text{т}}(t)$ колесной машины запишем как отрицательное ускорение $j_{\text{т}}(t) = -\dfrac{dV_{\text{а}}}{dt}$.

$$\begin{aligned} &-m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}} \frac{dV_{\text{а}}}{dt} = \\ &= \text{к}_{\text{в}} F_{\text{а}} \left[V_{\text{а}}(t) \right]^2 + m_{\text{а}} g \psi + \left[P(t) - P_0 \right] K_{\text{ту}}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $m_{\text{а}}$ – масса колесной машины; $\delta_{\text{вр}}$ – коэффициент учета вращающихся масс колесной машины; $V_{\text{а}}(t)$ – скорость движения колесной машины; t – независимая переменная; $t \in [t_0, t_m]$ (t_0 – время начала процесса, $t_{\text{т}}$ – время торможения колесной машины); $\text{к}_{\text{в}}, F_{\text{а}}$ – коэффициент обтекаемости и лобовая площадь машины; g – ускорение свободного падения; ψ – коэффициент дорожного сопротивления; $P_{\text{п}}(t)$ – управляющее воздействие, подведенное к педали тормоза колесной машины; P_0 – нечувствительность тормозного управления колесной машины; $K_{\text{ту}} = i_{\text{п}} K_{\text{у}} \left[K_{\text{т}1} K_{\text{э}1} + K_{\text{т}2} K_{\text{э}2} K_{\text{ртс}} \right]$ – коэффициент передачи тормозного управления ($i_{\text{п}}$ – передаточное число педали тормоза; $K_{\text{у}}$ – коэффициент сервисного усиления управляющего воздействия, подведенного к педали тормоза; $K_{\text{т}1}, K_{\text{т}2}$ – коэффициенты передачи тормозных контуров; $K_{\text{э}1}, K_{\text{э}2}$ – коэффициенты эффективности тормозных колес; $K_{\text{ртс}}$ – коэффициент регулятора тормозных сил).

Поделив обе части уравнения на произведение «$-m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}}$» и полагая, что на данном участке линеаризации уравнения движения колесной машины $V_{\text{а ср}} = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{dV_{\text{а}}}{dt} = -\frac{\kappa_{\text{в}} F_{\text{в}} V_{\text{а ср}}}{m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}}} V_{\text{а}}(t) - \frac{g\psi}{\delta_{\text{вр}}} - \\ &- \frac{K_{\text{ту}}}{m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}}} \left[P_{\text{п}}(t) - P_0 \right] \end{aligned} . \qquad (3)$$

С учетом положений, приведенных в [5], коэффициент эффективности тормозного управления можно представить в виде

$$k = \frac{j_{\text{т}}(t) - j_{w+\psi}(t)}{P_{\text{п}}(t) - P_0} , \qquad (4)$$

где $j_{w+\psi}(t)$ – замедление колесной машины, обусловленное силами сопротивления воздуха и дороги.

Теперь на основе сопоставления последнего компонента в уравнении (3) и выражения (4) коэффициент эффективности тормозного управления можно записать как отношение

$$k = \frac{K_{\text{ту}}}{m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}}} . \qquad (5)$$

Введем обозначения:

$\dfrac{dV_{\text{а}}}{dt} = \dot{V}_{\text{а}}$ – ускорение колесной машины;

$a = \dfrac{\kappa_{\text{в}} F_{\text{а}} V_{\text{а ср}}}{m_{\text{а}} \delta_{\text{вр}}}$ – коэффициент (квазистационарный);

$\beta = \dfrac{g\psi}{\delta_{\text{вр}}}$ – замедление колесной машины, обусловленное сопротивлением дороги;

$u = P_{\text{п}}(t) - P_0$ – задающее воздействие тормозного управления.

Уравнение (1), описывающее объект управления (колесную машину) с учетом принятых обозначений и отношения (5), приобретает вид

$$\dot{V}_{\text{а}} = -a V_{\text{а}} - \beta - ku . \qquad (6)$$

Данное уравнение (6) имеет линейный характер на определенном участке движения при действии возмущений. Коэффициент эффективности тормозного управления k в общем случае может быть переменным, например, при снижении эффективности в случае существенного нагрева тормозных механизмов. В рассматриваемом случае коэффициент эффективности тормозного управления k имеет квазистационарный характер.

Невозмущенное движение на этом участке можно представить в виде уравнения (7), описывающего некоторую модель, соответствующую установившемуся движению колесной машины в негруженом состоянии.

$$\dot{V}_{\text{м}} = -a_{\text{м}} V_{\text{м}} - \beta - k_{\text{м}} q, \qquad (7)$$

где $\dot{V}_{\text{м}}$, $V_{\text{м}}$ – соответственно ускорение и скорость движения эталонной модели колесной машины, у которой масса $m_{\text{сн}}$ соответствует снаряженному состоянию; $a_{\text{м}} = \dfrac{\kappa_{\text{в}} F_{\text{а}} V_{\text{м}}}{m_{\text{сн}} \delta_{\text{вр}}}$ – коэффициент (квазистационарный на данном участке линеаризации уравнения движения эталонной модели); $k_{\text{м}} = \dfrac{K_{\text{тум}}}{m_{\text{сн}}}$ – постоянный коэффициент эффективности тормозного управления эталонной модели; q – задающее воздействие управления модели.

Вычитая из (7) уравнение (6), после преобразований получим уравнение возмущенного движения системы

$$\dot{\varepsilon}_1 = -a_{\text{м}} \varepsilon_1 + (a - a_{\text{м}}) V_{\text{а}} - k_{\text{м}} q + ku, \qquad (8)$$

где $\varepsilon_1 = V_{\text{м}} - V_{\text{а}}$ и $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{V}_{\text{м}} - \dot{V}_{\text{а}}$ – отклонение, соответственно, скорости и ускорения при действии возмущений.

Учитывая, что коэффициенты a и $a_{\text{м}}$ отличаются незначительно, то второй член в правой части уравнения (8) можно считать несущественным и опустить. Введем обозначения: $k = k_{\text{м}} - \Delta k$, $u = q + \xi$ и после преобразований уравнение (8) примет вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = -a_{\text{м}} \varepsilon_1 - \Delta k q + k\xi, \qquad (9)$$

где Δk – снижение коэффициента эффективности тормозного управления; ξ – коррекция управляющего воздействия.

Для линейного объекта управления и нелинейного управляющего устройства (тормозного привода) система уравнений автоматического управления имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -a_{\text{м}} x_1 - \Delta k q + k\xi \\ &\dot{x}_2 = x_1 \\ &\dot{\xi} = f(\sigma) \\ &\sigma = -c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - r\xi \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

где x_2 – отклонение координаты (тормозного пути) колесной машины; $\dot{x}_2 = x_1 = \varepsilon$ – отклонение скорости движения; $\dot{x}_1 = \dot{\varepsilon}$ – отклонение ускорения колесной машины; $f(\sigma)$ – характеристика модулятора; σ – входной сигнал модулятора; c_1, c_2 – передаточные числа измерительных цепей; r – коэффициент обратной связи системы управления.

В матричной форме записи система (10) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathrm{x}} = A\mathrm{x} - \Delta k q + \mathrm{b}\xi \\ &\dot{\xi} = f(\sigma) \\ &\sigma = \left(\mathrm{c}^T, \dot{\mathrm{x}}\right) - r\xi \end{aligned}\right\}, \qquad (11)$$

где

$A = \begin{pmatrix} -a_{\text{м}} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\dot{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{b} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\mathrm{c}^T = \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ – матрицы системы; $(.,.)$ – скалярное произведение векторов.

В уравнениях (11) неизвестными функциями времени является матрица-столбец x и скалярная величина ξ. Дифференцируя систему (11), получим описание скорости изменения параметра для оценки состояния системы управления. Для приведения системы уравнений к нормальной форме записи перейдем к новым переменным, а именно, пусть

$$\begin{aligned} &\mathrm{y} = A\mathrm{x} - \Delta k q + \mathrm{b}\xi = \dot{\mathrm{x}} \\ &\sigma = \left(\mathrm{c}^T, \dot{\mathrm{x}}\right) - r\xi \end{aligned}. \qquad (12)$$

Тогда после дифференцирования и замены переменных в системе (11) получим

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}=A\dot{x}+b\dot{\xi}\\&\dot{\sigma}=\left(c^{T},\ddot{x}\right)-r\dot{\xi}\\&\dot{\xi}=f(\sigma)\end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}=Ay+b\dot{\xi}\\&\dot{\sigma}=\left(c^{T},\dot{y}\right)-r\dot{\xi}\\&\dot{\xi}=f(\sigma)\end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

Преобразуем второе уравнение системы (13), подставив значение $\dot{y}$

$$\dot{\sigma}=c^{T}\left(Ay+b\dot{\xi}\right)-r\dot{\xi}=c^{T}Ay+\left(\left(c^{T},b\right)-r\right)\dot{\xi},$$

обозначив

$$r^{*}=-\left(\left(c^{T},b\right)-r\right);$$
$$c^{*}=A'c,$$

и учитывая, что $c^{T}A=\left(A^{T}c\right)^{T}$, получим $\dot{\sigma}=\left(c^{*}\right)^{T}y-r^{*}\dot{\xi}$. После проведенных преобразований и введенных обозначений система уравнений (10) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}=Ay+b\dot{\xi}\\&\dot{\sigma}=\left(c^{*}\right)^{T}y-r^{*}\dot{\xi}\\&\dot{\xi}=f(\sigma)\end{aligned}\right\}. \qquad (14)$$

Упростим систему (14), подставив в первое и второе уравнения значение $\dot{\xi}$.

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}=Ay+bf(\sigma)\\&\dot{\sigma}=\left(c^{*}\right)^{T}y-r^{*}f(\sigma)\end{aligned}\right\}. \qquad (15)$$

Потребуем, чтобы определитель линейного преобразования (12) был отличен от нуля

$$\begin{vmatrix}-a_{\text{м}} & 0 & k\\ 1 & 0 & 0\\ -c_{1} & c_{2} & -r\end{vmatrix}=k\cdot c_{2}\neq 0. \qquad (16)$$

В этом предположении дифференциальные уравнения возмущенного движения (11) и (15) будут взаимно эквивалентны. Это означает, что из абсолютной устойчивости относительно переменных y и σ следует абсолютная устойчивость относительно переменных x, ξ, и наоборот.

Условия устойчивости можно отыскать и по системе (15) в матричной форме [6, 7], но метод, предложенный Лурье [8], более простой. Метод Лурье основан на переходе к каноническим переменным и позволяет независимо от начального состояния системы и конкретного выбора допустимой характеристики $f(\sigma)$ регулятора определить необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости системы (11).

Для перехода в системе (15) к каноническим переменным выполним линейное преобразование

$$u=\Lambda y$$

с неособенной матрицей $\Lambda^{-1}=\left\|\alpha_{kj}\right\|$. Для компонентов уравнений (15) линейное преобразование имеет вид

$$y=\Lambda^{-1}u,\ \dot{y}=\Lambda^{-1}\dot{u}.$$

После линейного преобразования система (15) примет вид

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda^{-1}\dot{u}=A\Lambda^{-1}u+bf(\sigma)\\&\dot{\sigma}=\left(c^{*}\right)^{T}\Lambda^{-1}u-r^{*}f(\sigma)\end{aligned}\right\}.$$

Преобразуем первое уравнение, умножив его слева на матрицу Λ

$$\Lambda\Lambda^{-1}\dot{u}=\Lambda A\Lambda^{-1}u+\Lambda bf(\sigma).$$

Тогда, учитывая равенства $\Lambda\Lambda^{-1}\dot{u}=E\dot{u}=\dot{u}$ и обозначив $B=\Lambda A\Lambda^{-1}$, $h=\Lambda b$, $g=(\Lambda^{-1})^{T}c$, найдем

$$\left.\begin{aligned}&\dot{u}=Bu+hf(\sigma)\\&\dot{\sigma}=g^{T}u-r^{*}f(\sigma)\end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Будем задавать не матрицу Λ, а матрицу B, считая, что она представляет нормальную форму Жордана для матрицы A [9]. Для определения нормальной матрицы Жордана найдем корни характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-a_{м}-\lambda & 0\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix},$$

где $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – единичная матрица.

Раскрывая определитель, получим

$$\lambda\cdot(\lambda+a_{м})=0;$$

отсюда найдем корни характеристического уравнения: $\lambda_1=-a_{м}$ и $\lambda_2=0$.

Так как только один корень характеристического уравнения равен нулю, а второй корень простой, то нормальная матрица Жордана для матрицы A имеет вид [9]

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В уравнениях (17) нужно найти матрицы h и g, а для этого нужно знать матрицу Λ и обратную матрицу Λ^{-1}.

Обозначим

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Матрицу Λ будем искать, пользуясь формулой [9]

$$B\Lambda=\Lambda A.$$

Составим произведение $B\Lambda$ и ΛA

$$\begin{aligned}B\Lambda&=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\alpha_{11} & \lambda_1\alpha_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix};\\ \Lambda A&=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\ \alpha_{21}\alpha_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\alpha_{11}+\alpha_{12} & 0\\ \lambda_1\alpha_{21}+\alpha_{22} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}.$$

Так как матрицы $B\Lambda$ и ΛA равны, то должны быть равны соответствующие элементы

$$\begin{matrix}\lambda_1\alpha_{11}=\lambda_1\alpha_{11}+\alpha_{12} & 0=\lambda_1\alpha_{21}+\alpha_{22}\\ \lambda_1\alpha_{12}=0 & 0=0\end{matrix}. \quad (18)$$

Из этих уравнений независимыми являются только два. Поэтому два неизвестных элемента матрицы Λ можно выбрать произвольно, выполнив при этом условие $\det\Lambda\neq 0$. Предположим, что $\alpha_{11}=1;\alpha_{22}=1$. Тогда из найденных уравнений (18) определим

$$\alpha_{12}=0,\ \alpha_{21}=-\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{a_{м}}.$$

Теперь матрица Λ вполне определена

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{a_{м}} & 1\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица Λ^{-1}

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\Lambda_{11}}{\Delta} & \dfrac{\Lambda_{21}}{\Delta}\\ \dfrac{\Lambda_{12}}{\Delta} & \dfrac{\Lambda_{22}}{\Delta}\end{pmatrix},$$

где Λ_{kj} – алгебраическое дополнение элементов α_{kj} матрицы Λ; $\Delta\det\Lambda$ – определитель матрицы Λ.

Алгебраическое дополнение элемента α_{kj} равно его минору, умноженному на $(-1)^{k+j}$ [10]. В нашем случае

$$\Delta=\det\begin{vmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{a_{м}} & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$\Lambda_{11}=1;\Lambda_{12}=-\frac{1}{a_{м}};\Lambda_{21}=0;\Lambda_{22}=1.$$

Следовательно, обратная матрица

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{1}{a_{м}} & 1\end{pmatrix}.$$

Определим векторы h и g по формулам [9]

$$h=\Lambda b=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{1}{a_{м}} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ \dfrac{k}{a_{м}}\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{g} = (\Lambda^{-1})\mathrm{c}^* = (\Lambda^{-1})' A' \mathrm{c} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{a_м} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_м & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_м c_1 + c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot$$

Система уравнений (11), записанная в скалярной форме после замены переменных x и ξ, соответственно, на u и , σ примет вид

$$\left.\begin{aligned} \dot u_1 &= \lambda_1 u_1 + h_1 f(\sigma) \\ \dot u_2 &= \qquad h_2 f(\sigma) \\ \dot\sigma &= g_1 u_1 + g_2 u_2 - r^* f(\sigma) \end{aligned}\right\},$$

где $h_1 = k; h_2 = \dfrac{k}{a_м}; \mathrm{g}_1 = a_м c_1 + c_2; g_2 = 0$.

Заменим переменные u на канонические z по формулам

$$u_1 = h_1 z_1;\ u_2 = h_2 z_2 .$$

В результате замены переменных и обозначений коэффициентов имеем каноническую форму записи уравнений системы управления

$$\left.\begin{aligned} \dot z_1 &= \lambda_1 z_1 + f(\sigma) \\ \dot z_2 &= \qquad f(\sigma) \\ \dot\sigma &= e_1 z_1 - r^* f(\sigma) \end{aligned}\right\}, \qquad (19)$$

где $e_1 = g_1 h_1 = (a_м c_1 + c_2)k$; $e_2 = g_2 h_2 = 0$

$$r^* = -\left(\left(\mathrm{c}^*, b\right) - r\right) = -\left(\left(-c_1 + c_2\right) \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} - r\right) =$$

$$= r + c_1 k.$$

Условия абсолютной устойчивости движения системы

Для определения достаточных условий абсолютной устойчивости составим следующую функцию Ляпунова [9]

$$V = -\frac{1}{2}|e_1| z_1^2 - \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma . \qquad (20)$$

Очевидно, что функция V определенно-отрицательна относительно переменных z_1 и σ и не зависит от z_2. Вычислим полную производную от функции V по времени

$$\dot V = -|e_1| z_1 \cdot \dot z_1 - f(\sigma)\dot\sigma . \qquad (21)$$

Внесем в выражение (21) значения производных $\dot z_1$ и $\dot\sigma$ из уравнений (19)

$$\dot V = -|e_1| z_1 \left[\lambda_1 z_1 + f(\sigma)\right] - f(\sigma)\left[e_1 z_1 - r^* f(\sigma)\right],$$

или

$$\dot V = -|e_1| \lambda_1 z_1^2 - \left(|e_1| + e_1\right) z_1 f(\sigma) + r^* f^2(\sigma) . \qquad (22)$$

Поскольку функция V определенно-отрицательна относительно переменных z_1 и σ и не зависит от z_2, то устойчивость движения системы управления будет обеспечиваться при определенно-положительном значении ее полной производной (22).

Для анализа устойчивости движения системы управления рассмотрим два математически возможных варианта:

– вариант первый: коэффициент $e_1 > 0$, и, соответственно $|e_1| = e_1$.

Тогда равенство (20) примет вид

$$\dot V = -e_1 \lambda_1 z_1^2 - 2 e_1 z_1 f(\sigma) + r^* f(\sigma) ,$$

что можно записать и так

$$\dot V = -e_1 \lambda_1 \left[z_1 + \frac{f(\sigma)}{\lambda_1}\right]^2 + \left(r^* + \frac{e_1}{\lambda_1}\right) f^2(\sigma) . \qquad (23)$$

Эта функция будет определенно-положительна относительно z_1 и σ, если при $e_1 > 0$ будет выполняться условие

$$r^* + \frac{e_1}{\lambda_1} > 0 . \qquad (24)$$

Преобразуем условие (24), подставив значения e_1 и λ_1

$$r + c_1 k + \frac{k(a_м c_1 + c_2)}{-a_м} > 0;$$

$$r a_м > k c_2 .$$

И окончательно условие обеспечения устойчивого движения системы управления в первом варианте примет вид

$$r > k\frac{c_2}{a_{\text{м}}}. \qquad (25)$$

Область абсолютной устойчивости системы автоматического управления тормозами колесной машины, в соответствии с условием (25), можно представить в виде рис. 1.

Минимальное и максимальное значения параметра $k\frac{c_2}{a_{\text{м}}}$ для данного линеаризованного участка движения определяются коэффициентом эффективности тормозного управления k, параметрами колесной машины в снаряженном состоянии и средней скоростью ее движения на этом участке. При этом необходимо также соблюдать условие (16).

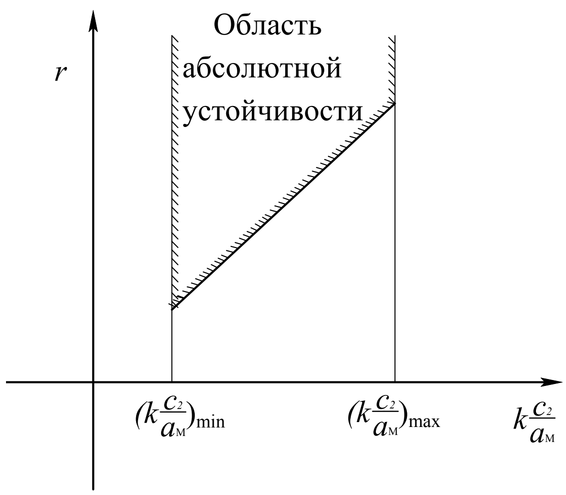

Рис. 1. Устойчивость движения системы управления при $e_1 > 0$

– вариант второй: коэффициент $e_1 < 0$ и, соответственно, $|e_1| = -e_1$.

Теперь равенство (22) приобретает вид

$$\dot{V} = e_1\lambda_1 z_1^2 + r^* f^2(\sigma). \qquad (26)$$

Функция $\dot{V}$, определенная равенством (26), будет определенно-положительной относительно z_1 и σ, так как $\lambda_1 = -a_{\text{м}} < 0$ при всех $e_1 < 0$, если выполняется условие

$$r^* > 0. \qquad (27)$$

Подставив значение r^*, окончательно получим условие устойчивости во втором варианте

$$r + c_1 k > 0 \Rightarrow r > -c_1 k. \qquad (28)$$

Область абсолютной устойчивости системы автоматического управления в этом случае имеет вид, представленный на рис. 2.

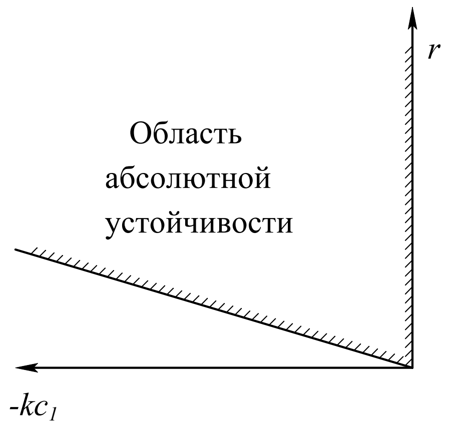

Рис. 2. Устойчивость движения системы управления при $e_1 < 0$

Выводы

В соответствии с первым вариантом условия устойчивости возмущенного движения, коэффициент обратной связи r системы управления тормозами колесной машины должен быть больше нуля.

Минимально допустимое значение коэффициента обратной связи r определяется минимально допустимым значением коэффициента эффективности тормозного управления $k_{\min}$ [11] и максимальной скоростью модели колесной машины $V_{\text{м}\max}$. Данная скорость должна соответствовать максимальной технической скорости колесной машины в снаряженном состоянии.

Максимальное значение коэффициента обратной связи r определяется максимально допустимым коэффициентом эффективности тормозного управления $k_{\max}$ [11] и минимальной скоростью модели колесной машины $V_{\text{м}\min}$, которая должна быть равна минимальной устойчивой скорости движения колесной машины.

Второй вариант условия устойчивости возмущенного движения системы, то есть в случае отрицательного значения коэффициента e_1, возможен только при отрицательном значении коэффициента эффективности тормозного управления k (см. систему (19)). Фактически это означает, что заданному усилию на педали тормоза соответствует определенное ускорение колесной машины. То есть данный вариант условия устойчивости соответствует тяговому режиму и не приемлем для анализа устойчивости возмущенного движения системы управления тормозами колесной машины.

Литература

1. Ревин А.А. Повышение эффективности, устойчивости и управляемости при торможении автотранспортных средств: дис. … докт. техн. наук: 05.05.03 / Ревин Александр Александрович. – Волгоград, 1983. – 522 с.
2. Ревин А.А. Автомобильные автоматизированные тормозные системы: техническое решение, теория, свойства: монография / А.А. Ревин. – Волгоград: Изд-во Ин-та качеств, 1995. – 160 с.
3. Богомолов В.А. Создание и исследование систем управления торможением автотранспортных средств: дис. … докт. техн. наук: 05.22.02 / В.А. Богомолов. – Харьков, 2001. – 537с.
4. Литвинов А.С. Автомобиль: теория эксплуатационных свойств: учебник для вузов по специальности «Автомобили и автомобильное хозяйство» / А.С. Литвинов, Я.Е. Фаробин. – М.: Машиностроение, 1989. – 240 с.
5. Туренко А.Н. Формирование граничных условий статической характеристики тормозного управления колесной машины / А.Н. Туренко, С.Н. Шуклинов // Тематичний випуск: Транспортне машинобудування: зб. наук. пр. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2009. – № 47. – С. 26–33.
6. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования / В.А. Якубович // ДАН СССР. – Т. 143, № 6. – 1962. – С. 1304–1307.
7. Якубович В.А. Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. 1. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний / В.А. Якубович // Автоматика и телемеханика. – 1964. – Т. 25, № 7. – С. 1017–1028.
8. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования / А.И. Лурье. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 217 с.
9. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 833 с.
11. Савельев Б.В. Обоснование статической характеристики тормозной системы автомобиля: автореф. дис. на соискание учен. степени канд. техн. наук: 05.05.03 «Автомобили и тракторы» / Б.В. Савельев. – М., 1988. – 21 с.

Рецензент: М.А. Подригало, профессор, д.т.н., ХНАДУ.

Статья поступила в редакцию 15 августа 2011 г.