УДК 519.6

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ЗНАХОДЖЕННЯ АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З МОНОТОННОЮ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Пархоменко В.Г., Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

При математичному моделюванні різних фізико-механічних процесів, зокрема, процесів нелінійної теплопровідності [1], виникає необхідність у розв'язанні крайових задач для напівілінійного еліптичного рівняння:

$$-\Delta u = u^p, \ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \gamma u\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, Ω – обмежена область з $\mathbb{R}^2$, $p > 0$, $\gamma > 0$.

Особливий інтерес представляє випадок, коли область Ω є кругом радіуса R. Тоді ставиться задача знаходження аксіально-симетричного розв'язку задачі (1), (2). Перейдемо у (1), (2) до полярних координат за формулами:

$$x_1 = \rho\cos\varphi,$$

$$x_2 = \rho\sin\varphi.$$

Якщо врахувати, що розв'язок рівняння є залежним тільки від відстані $\rho = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ до центру круга, перейдемо до напівлінійного звичайного диференціального рівняння вигляду

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = u^p. \tag{3}$$

Крайову умову (2), яку задано на межі області Ω, тобто для $|\mathbf{x}| = R$, буде зведено до вигляду $u'(R) + \gamma u(R) = 0$. Точка $\rho = 0$ є особливою точкою

рівняння (3), отже, постає необхідність поставити умову обмеженості розв'язку в цій точці: $|u(0)| < +\infty$.

Таким чином, крайову задачу (1), (2) звели до наступної крайової задачі:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{du}{d\rho}\right) = u^p,\ 0 < \rho < R, \tag{4}$$

$$|u(0)| < +\infty,\ u'(R) + \gamma u(R) = 0. \tag{5}$$

Далі, від крайової задачі (4), (5) переходимо до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна [2]:

$$u(\rho) = \int_0^R K(\rho, s) u^p(s) ds,$$

де $K(\rho, s) = sG(\rho, s)$, а $G(\rho, s)$ – функція Гріна задачі (4), (5).

Нелінійний інтегральний оператор $T(u) = \int_0^R K(\rho, s) u^p(s) ds$, визначений у банаховому просторі $C[0, R]$ неперервних на $[0, R]$ функцій, напівупорядкованому конусом K_+ невід'ємних функцій, має ряд властивостей, а саме:

а) є додатним оператором;

б) є u_0-додатним оператором, де $u_0(\rho) = \frac{1}{4\gamma}(2R + R^2\gamma - \gamma\rho^2)$;

в) є монотонним (ізотонним) оператором;

г) є увігнутим і навіть u_0-увігнутим оператором за умови $p \in (0,1)$, де $u_0(\rho) = \frac{1}{4\gamma}(2R + R^2\gamma - \gamma\rho^2)$.

Для оператора T умовами $T(v_0) \le v_0$, $T(w_0) \ge w_0$ виділимо інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$, де $v_0(\rho) = \alpha u_0(\rho)$, $w_0(\rho) = \beta u_0(\rho)$, $0 < \alpha < \beta$, і побудуємо два паралельні ітераційні процеси [2, 3]

$$v^{(n+1)}(\rho) = \int_0^R K(\rho, s)[v^{(n)}(s)]^p ds,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$w^{(n+1)}(\rho)=\int_0^R K(\rho,s)[w^{(n)}(s)]^p\,ds\,,\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$v^{(0)}(\rho)=v_0(\rho)\,,\ w^{(0)}(\rho)=w_0(\rho)\,.$$

Послідовність $\{v^{(n)}(\rho)\}$ не спадає за конусом K_+, а послідовність $\{w^{(n)}(\rho)\}$, у свою чергу, не зростає за конусом K_+. Конус K_+ є нормальним, а оператор T є цілком неперервним. Таким чином, для обох побудованих ітераційних послідовностей має місце збіжність у нормі простору $C[0,R]$ до єдиного додатного розв'язку u^* крайової задачі (4), (5) і справджуються нерівності

$$v_0=v^{(0)}\le v^{(1)}\le\ldots\le v^{(n)}\le\ldots\le u^*\le\ldots\le w^{(n)}\le\ldots\le w^{(1)}\le w^{(0)}=w_0\,.$$

За наближений розв'язок крайової задачі (4), (5) на n-му кроці обирається функція $u^{(n)}(\rho)=\frac{1}{2}(v^{(n)}(\rho)+w^{(n)}(\rho))$. При цьому оцінка похибки наближення визначається нерівністю $\left\|u^{(n)}-u^*\right\|_{C[0,R]}\le\frac{1}{2}\max\limits_{\rho\in[0,R]}(w^{(n)}(\rho)-v^{(n)}(\rho))$.

Чисельний експеримент проведено для різних значень параметрів p, $0<p<1$, $\lambda=1,2,3$, $\gamma=5$. На рисунку 1 зображено графік наближеного розв'язку при $p=0{,}5$, $\lambda=1$, на рисунку 2 – його лінії рівня. Точність 10^{-4} було досягнуто за 7 ітерацій з оцінкою похибки $\varepsilon=6{,}68\cdot10^{-5}$. Рисунок 3 відображає залежність норм наближених розв'язків від значень параметрів p і λ. Як видно з графіків, чим більшим є параметр λ, тим більшими є норми розв'язків. Водночас при наближенні показника p до 1 норма розв'язку прямує до 0.

Проведені дослідження є продовженням роботи, яку було розпочато в [3, 4], де було застосовано метод двобічних наближень до знаходження додатного аксіально-симетричного розв'язку першої крайової задачі для нелінійного еліптичного диференціального рівняння. У подальшому планується дослідити застосування даного методу для інших типів крайових

умов та задач у просторах більшої розмірності.

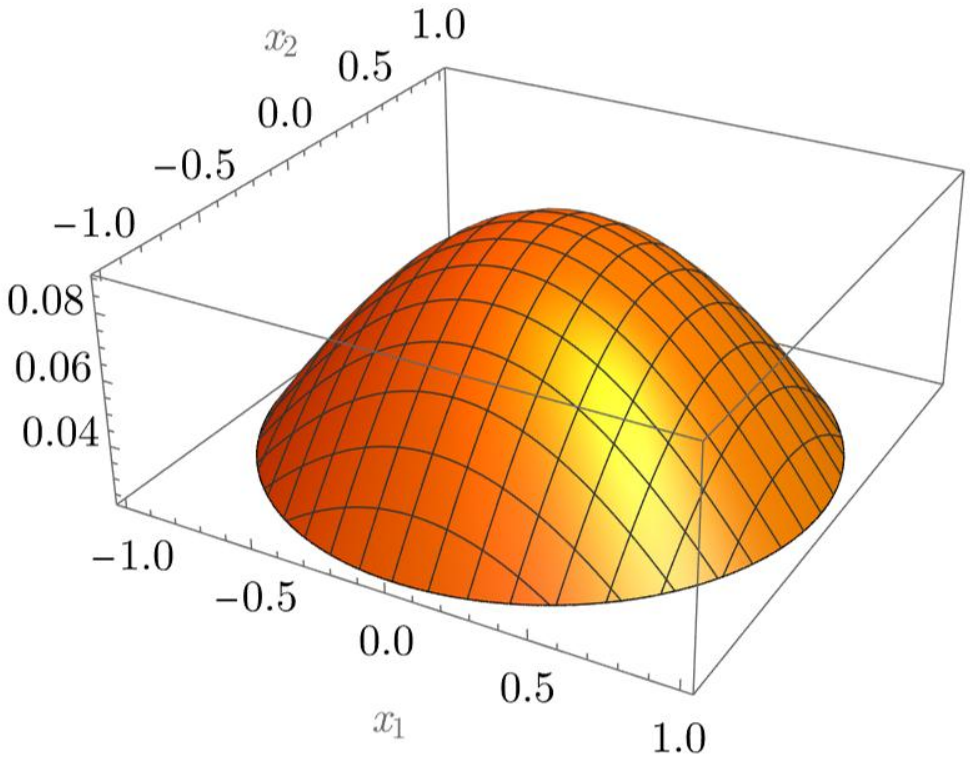

Рисунок 1 – Графік наближеного розв'язку $u^{(7)}(x_1, x_2)$

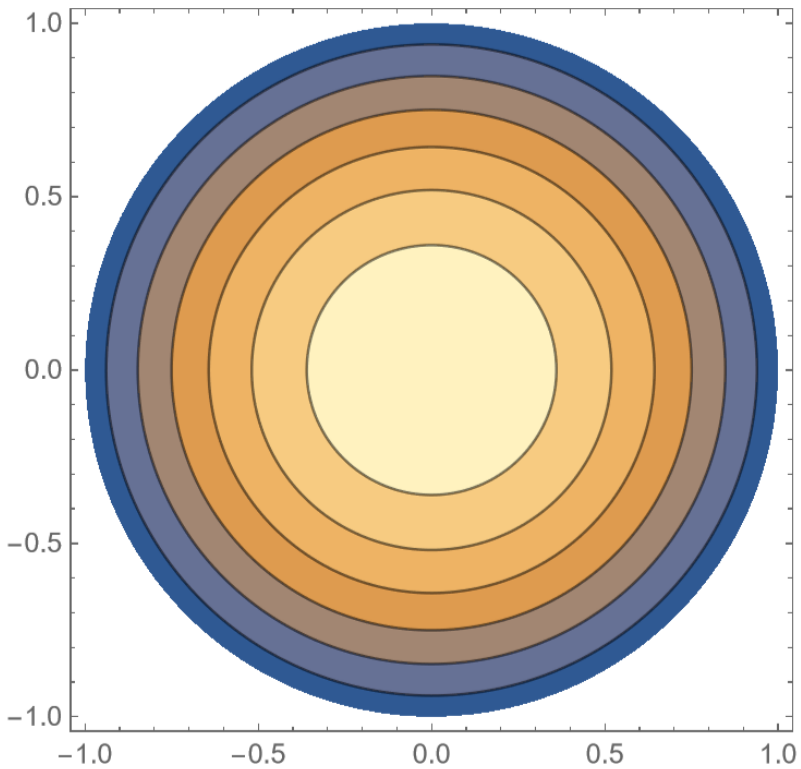

Рисунок 2 – Лінії рівня наближеного розв'язку $u^{(7)}(x_1, x_2)$

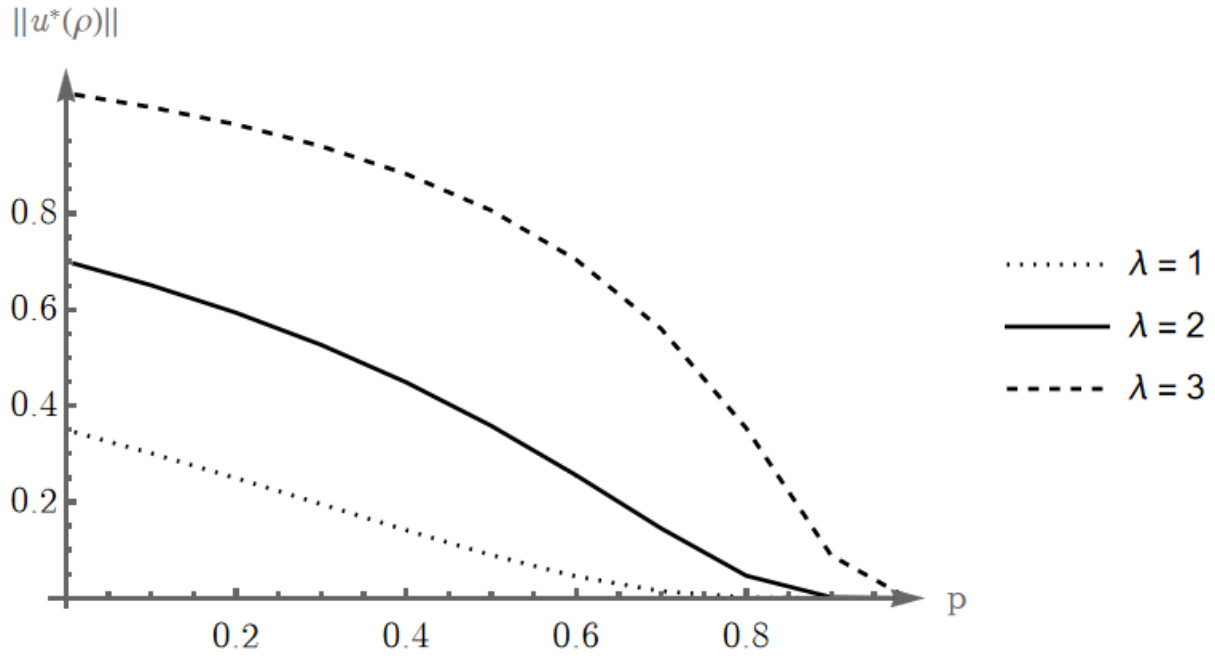

Рисунок 3 – Графік залежності норм наближеного розв’язку від значень параметрів p та λ

Література:

1. Oliva F., Petitta F. Singular elliptic PDEs: an extensive overview. *Partial Differential Equations and Applications*. 2025. Vol. 6, Article No. 6. https://doi.org/10.1007/s42985-024-00308-9
2. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. Тбилиси : Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
3. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв’язків крайових задач з монотонними нелінійностями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. Вип. 25. С. 121–133. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2024-25.121-133
4. Пархоменко В. Г., Сидоров М. В. Застосування методу двобічних наближень до знаходження додатних аксіально-симетричних розв’язків крайових задач із сингулярними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2025. Вип 27. С. 39-52. https://doi.org/10.32626/2308-5878.2025-27.39-52